Lycée Juliette Récamier
N. CHEVROT

DM d'été. Méthodes de calcul.

Vous êtes inscrits en classe préparatoire D2 au lycée Juliette Récamier.

Félicitations!

Les mathématiques sont particulièrement utilisées en microéconomie où vous allez étudier l'évolution de phénomènes économiques et avoir besoin de dériver , de résoudre des équations et de manipuler de nombreuses expressions avec des puissances et des fractions, regardez par exemple sur internet l'expression de la fonction Cobb-Douglas.

Il est très important que vous retrouviez votre meilleur niveau de mathématiques et que vous soyez efficace, dans le rythme dès le début d'année. Il faudra acquérir des méthodes pour ne pas vous laisser submerger et pour ne pas perdre un temps précieux. Tel un marathonien, **la clé de la réussite est la régularité dans l'effort**.

Voici une liste d'exercices qui vont me permettre de débuter l'année efficacement et me servir à déceler vos besoins, vos lacunes éventuelles. Il est indispensable que vous cherchiez ces exercices. **Apportez le dès le jour de la rentrée,** ce sera votre premier DM d'une longue série.

À travers ces exercices (corrigés), je souhaite aborder les aspects calculatoires assez basiques :

— les transformations d'écritures (avec des fractions ou des puissances, en développant ou en factorisant);

— les résolutions d'équations et d'inéquations, tableaux de signes;

— les calculs de dérivées et la recherche de leurs signes;

— d'une manière générale, nous allons aussi parler de rédaction.

Prenez l'initiative de revoir un chapitre de première ou de terminale que vous n'avez pas bien compris, d'essayer de travailler un chapitre de "spécialité maths" si vous avez pris "maths complémentaire". Pour être bon en calculs, il n'y a pas de secret : il faut pratiquer, en faire beaucoup. Il faut automatiser de processus calculatoires parfois compliqués.

Je répondrai à toutes vos questions à la rentrée. L'erreur est formatrice et porteuse de sens. Si on s'est trompé, c'est qu'il y a une difficulté. Alors, **trompez-vous.** Pour progresser, il faut se tromper (à l'entrainement), analyser et comprendre la raison de ses erreurs.

Un devoir (DM ou DS) est une échange épistolaire entre le le correcteur et l'étudiant. Il est donc nécessaire que le sujet fourni soit propre, et que la réponse de l'étudiant soit tout aussi respectueuse, claire. Soignez vos copies, prenez modèle sur les corrigés.

Enfin, profitez de vos vacances pour commencer l'année sans heure de sommeil en retard, plein d'énergie pour passer ce rite initiatique que sont ces deux années. Pour bien vous endormir, vous pouvez lire le livre de David Bessis "Mathematica" (livre de poche ISBN 978-2-7578-9853-6). Vous allez apprendre beaucoup de choses passionnantes et découvrir une énergie en vous que vous ne soupçonniez peut être pas.

Dans l'attente de vous rencontrer,

N. Chevrot

À la rentrée, je vais rapidement parler de rédaction, de la façon de rédiger des maths pour se faire comprendre.

Je vous propose l'exercice suivant. Vous allez devoir écrire la démonstration de la propriété de géométrie de 4$^{\text{ème}}$ suivante :

Proposition 1. *Soit A, B, C trois points distincts. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.*

$$C \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en } C.$$

Méthodes de calcul

Dans les pages qui suivent, je souhaite faire le point sur les méthodes de calcul. J'essaye de donner des exercices de difficulté croissante que tous aient chaussure à son pied. Si les derniers exercices sont plus compliqués, n'ayez pas peur de vous tromper, creusez, approfondissez.

1 Forme

Pour interpréter une expression, il faut s'interroger sur sa forme. Une même quantité peut s'écrire de plusieurs façons, revêtir plusieurs formes. Chaque forme peut avoir un avantage selon le problème que l'on cherche à résoudre.

1.1 Opérations usuelles

Une expression littérale est constituée de nombres et de lettres reliés par des opérations.
Ces opérations sont entre autres :

1. **L'addition :** on dit alors que la forme de l'expression est *une somme* (et donc la différence qui est la somme de l'opposé),
2. **La multiplication :** on dit alors que la forme de l'expression est *un produit* (et le quotient qui est le produit par l'inverse),
3. **les puissances et exponentielles** (carré, cube, mais aussi dans une certaine mesure la fonction racine et exponentielle),
4. **la composée** (enchainement d'opérations, par exemple la composée de $x \mapsto \ln x$ et de $x \mapsto x^2 + 1$ est $x \mapsto \ln(x)^2 + 1$)

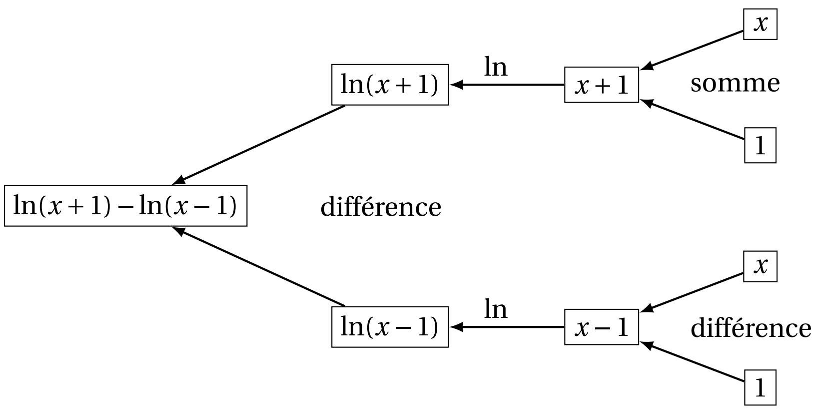
1.2 Arbre de calcul

Ces opérations sont organisées. Elles ne s'effectuent pas dans n'importe quel ordre. La plupart des erreurs de calcul sont dues à l'enchainement des opérations dans le mauvais ordre :

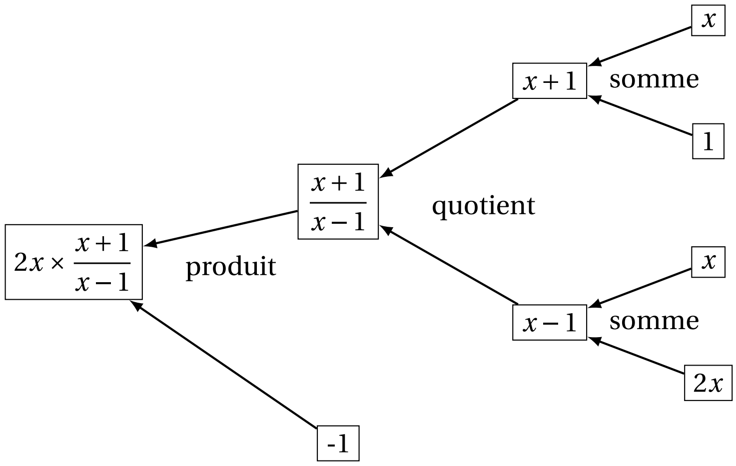
Le carré de la somme de x et de 1 n'est pas la même expression que la somme du carré de x et de 1. Vous le voyez ?

Un arbre de calcul est une façon de représenter comment s'ordonne ces calculs. Illustrons par deux exemples :

1. Voici l'arbre de calcul de $\ln(x+1) - \ln(x-1)$:



2. Voici l'arbre de calcul de l'expression $\dfrac{x+1}{x-1} + 1$:



L'opération du le premier niveau de l'arbre détermine la forme de l'expression. Ainsi, $\ln(x+1) - \ln(x-1)$ est une *différence* (ou une *somme*) et $2x\frac{x+1}{x-1}$ est un *produit.*

1.3 Priorité des opérations

La *priorité des opérations* est la convention d'usage qui précise l'ordre dans lequel les calculs doivent être effectués dans une expression.

Méthode 1.1. Les règles de priorité sont :

1. Les calculs entre parenthèses sont prioritaires sur les calculs situés en dehors. La barre horizontale de fraction ou de racine joue le rôle d'une parenthèse ;
2. L'exponentiation est prioritaire sur la multiplication, la division, l'addition et la soustraction ;
3. La multiplication, la division, factoriels sont prioritaires sur l'addition et la soustraction ;
4. Enfin, on effectue les additions et les soustractions.

Le stocke de parenthèse étant infini, n'hésitez pas à les utiliser à bon escient ! Voici un erreur courante à proscrire :

$$(n-1)^2 - (n^2-1) = n - 1\left((n-1) - (n+1)\right).$$

Voici deux erreurs courantes :

- Signe moins et exposant : $(-1)^n \neq -1^n$
- La place hasardeuse du trait de fraction comme le montre l'exercice suivant. Lorsqu'une expression est un quotient, le trait principal doit être aligné avec le signe égal.

Exercice 1. Quelle est la valeur de

$$a = \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \end{array}\ ?$$

1.4 Forme adaptée

Étant donnée une expression, on peut être amené à changer cette expression tout gardant l'égalité. On peut :

1. *Simplifier,* c'est à dire effectuer certains calculs pour que la nouvelle expression soit représentée par un arbre ayant moins de niveau. Essayez toujours de simplifier vos expressions.
2. *Factoriser* est l'action de transformer une somme en produit ;
3. *Développer* est l'action de transformer un produit en somme ;
4. *Mettre au même dénominateur* qui est l'action de transformer la somme de fractions en une fraction.

Chaque forme peut avoir un intérêt. Avant d'effectuer un calcul menant à un changement de forme, réfléchissez à l'utilité de ce calcul. La nouvelle forme est-elle intéressante pour répondre à la question posée. Par exemple :

— Pour résoudre une équation, on utilise souvent le théorème du produit nul. Pour résoudre une inéquatio, on utilise souvent un tableau des signes. On cherche donc à avoir une expression qui soit un produit ou un quotient.

— Si on cherche à dériver ou primitiver, les formules sont plus simples pour des sommes. On peut donc chercher à développer.

— La formule de dérivation d'un quotient est $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Souvent, on cherche le signe d'une dérivée. Dans ce cas, il est inutile de développer le dénominateur de cette fraction. Étant un carré, il est positif et le signe de cette dérivée est le même que le signe de $u'v - uv'$.

— Lorsqu'on étudie des limites, l'expression fournie peut être une forme indéterminée. Il faut alors souvent choisir une autre forme qui lèvera l'indétermination.

2 Résoudre une équation ou une inéquation

2.1 Le théorème du produit nul

Méthode 1.2. La méthode consiste à :

1. se ramener à un second membre nul ;
2. factoriser ;
3. Utiliser le théorème du produit nul : $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple d'erreur vue trop souvent dans des copies. Laquelle de ces solutions est la plus courte ? est juste ?

1. Solution 1 :
$$x^2 = 2 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{2} \iff x = \sqrt{2} \iff S = \{\sqrt{2}\}.$$
2. Solution 2 :
$$x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array} \right. \iff S = \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}.$$

2.2 Tableau des signes

Méthode 1.3. Pour comparer deux réels :

1. on se ramène à étudier le *signe de leur différence* ;
2. on factorise, si on compare des fractions, on met au même dénominateur ;
3. on dresse un *tableau des signes.*

3 Exercices

3.1 Priorité des opérations

Exercice 2. Construire l'arbre de calcul des expressions suivantes :

$$A = 2^n \times (2 + x)^n, \quad \text{et } B = \frac{x^2}{x+1} + \left(\frac{e^x}{x-1}\right).$$

Exercice 3. Lorsque l'on travaille avec des ensembles, les opérations les plus courantes sont $\cup$, $\cap$, $\bar{\cdot}$. On peut dresser un arbre de calcul pour ces opérations aussi. Dresser l'arbre de $A \cup \overline{B \cap C}$.

Exercice 4 (Utilisation d'un arbre pour obtenir un encadrement). Soit a, b deux réels de l'intervalle $[-2; 3]$. Dresser l'arbre de calcul de $(a+1)(b-3)$. L'adapter pour donner un encadrement de $(a+1)(b-3)$.

Exercice 5. Voici plusieurs égalités. Malheureusement, le copiste a perdu des parenthèses ! Vite, placer les parenthèses manquantes pour rétablir les égalités.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$, on a : $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+1}{x+1 \;\; x+2} = \frac{1}{x+1 \;\; x+2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n+1\dfrac{3n-1}{2n+2} = \frac{3}{2}n-1$
3. Pour tout $p \in [0;1]$, on a : $1-1-p^{\,2})^2 = 1-1+2p-p^2 \ ^2 = 2p-p^2 \ ^2 = 4p^2-4p^3+p^4$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-\ x+1\ 2x-1\ = -\ 2x^2-x+2x-1\ = -2x^2-x+1$.

3.2 Transformations d'écritures

Exercice 6. Sans calculatrice, donner la valeur de la fraction $\dfrac{(-3)\times 128\times 81\times(-1/2)}{27\times 32}$.

Exercice 7 (Transformations d'écriture).

1. Simplifier au maximum les expressions données en précisant les propriétés utilisées.
   a. $A = e^{-3x}e^{3x}$ **b.** $B = (e^3)^2$ **c.** $C = e^{-2x}(e^{2x})^2$
   d. $D = (e^x)^3 \times (e^{-x})^2$ **e.** $E = \dfrac{e^{2x}}{e^x}$ **f.** $F = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$
2. Développer et simplifier les expressions suivantes :
   a. $A = x(3x-1)$ **b.** $B = (x-1)(3x+1)$ **c.** $C = (x-1)^2$
   d. $D = (2x-1)^2$ **e.** $E = (2x-1)^2 - (x^2+1)$ **f.** $F = e^x(e^x-1)$
   g. $G = (e^x-1)^2$ **h.** $H = (e^x-1)^2 - (e^{2x}+1)$ **i.** $I = (e^x-1)^2 - (e^x+1)^2$.
3. Factoriser les expressions suivantes :
   a. $A = x^2 - x$ **b.** $B = (x-1)^2 - 4$ **c.** $C = (2x-1)^2 - x^2$ **e.** $E = (e^x-1)^2 - (e^x-1)$
   d. $D = (e^x-1)^2 - 4$
4. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $2^\alpha \times 3^\beta$ en précisant les propriétés des exposants utilisées :
   a. $A = 2\times 12^3 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$ **b.** $B = \frac{4\times 3^2}{6^3}$ **c.** $C = 6^2 \times (2\times 3^3)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.
5. Soit x un réel strictement positif. Écrire sous la forme la plus simple :
   a. $A = x^3 \times ((2x)^2)^3$ **b.** $B = \frac{x^2}{3x^{-1}}$ **c.** $C = \dfrac{4x^{-1}\times x^2}{(2\times x)^3}$.

3.3 Forme adaptée

Exercice 8 (Cas des polynômes). En seconde, on insiste beaucoup sur les différentes écritures (=formes) d'un polynôme. On se focalise sur les polynômes du second degré pour préparer à l'étude systématique vue en première.

1. Soit $P(x) = (2x-1)(3x-5)$. Cette forme est factorisée (écriture n° 1).
   (a) En déduire l'écriture développées (écriture n° 2).
   (b) Donner l'écriture canonique de $P(x)$ (écritures 3 n° 3). (Rappel, une écriture canonique d'un polynôme de degré 2 est une écriture de la forme $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$, où α, β, γ sont trois réels).
2. Parmi ces trois écritures, choisir la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Trouver le ou les extrema de P ;
   (b) Trouver l'image de 0 ;
   (c) Trouver les antécédents de 0 ;
   (d) Calculer la limite en $+\infty$ de P.

3.4 Résolution d'équations, d'inéquations

signe d'une dérivée, positions relatives de courbes, ensembles de définition

Exercice 9 (Résolution d'équations).

1. Résoudre les équations suivantes :
   a. $\frac{1}{3}x - 5 = 0$ **b.** $3x^2 - 4x = 0$ **c.** $\frac{x-1}{x} = 0$
   d. $(3x+2)(3x-2) = 1$ **e.** $\dfrac{e^x-1}{x} = 0$ **f.** $(1-x)(x-x^2) + x(x-x^2) = 0$

2. Résoudre les équations suivantes :
   a. $3e^x - 1 = 0$ **b.** $e^{2x} - 2e^x = 0$ **c.** $(\ln(x))^2 - 4 = 0$

3. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $4 - 9x^2 > 0$ **b.** $9 - (\ln(x))^2 \leqslant 0$ **c.** $(1-x)(x-x^2) + x(x-x^2) > 0$

Exercice 10 (Inéquations). Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x+2)^2 < (-3x+1)^2$ dans $\mathbb{R}$;
2. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x+1}{x+2} \geqslant 0$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-2;-1\}$;
3. $x^3 \geqslant \frac{16}{x}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.5 Applications à l'étude des fonctions

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. Donner le maximum d'informations sur f.

Exercice 12 (Famille de fonctions). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_n$ la famille de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de f_n dans un repère.

1. Quelle est la fonction f_1 ? Donner son sens de variation ?
2. Étudier le sens de variation de f_n sur $\mathbb{R}$. On traitera deux cas selon si n est pair ou impair.
3. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et de $\mathscr{C}_{n+1}$.

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

1. Est-il vrai que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$?
2. Est-il vrai que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) + f(-x) = 0$?

Exercice 14. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t : x \longmapsto t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Justifier que t est dérivable, dériver t. Étudier les variations de t.
2. Démontrer la relation suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t(x+y) = \frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}.$$

Exercice 15. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. On appelle point fixe de f un nombre tel que $f(\ell) = \ell$. Trouver les points fixes de f.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$.
4. Calculer la dérivée f', étudier son signe et en déduire les variations de f.

Exercice 16 (Position relative de courbes). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la famille de fonctions définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \longmapsto \left(\frac{x}{n} - \frac{n}{x}\right)^2$. Étudier les positions relatives des courbes représentatives de $\mathscr{C}_{f_n}$ et de $\mathscr{C}_{f_{n+1}}$. Exprimer les coordonnées des points d'intersection en fonction de n.

Solution :

Correction 1

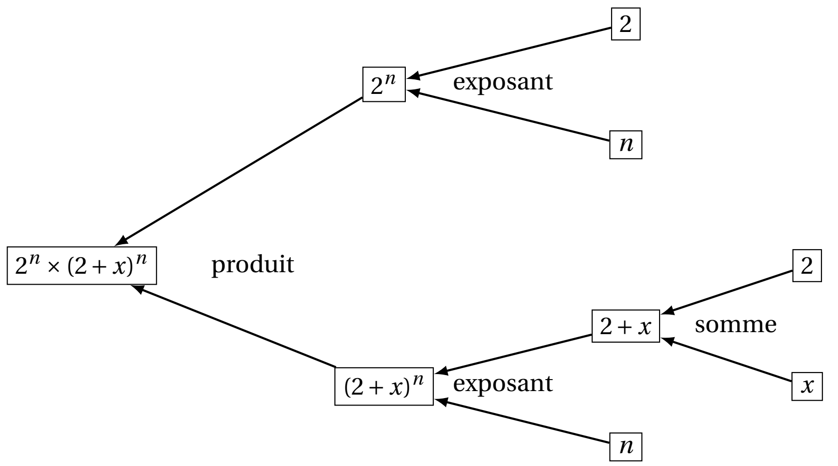
Le signe = étant entre les deux traits de fraction, on ne sait pas ! Ainsi, a est mal défini. On peut avoir deux interprétations :

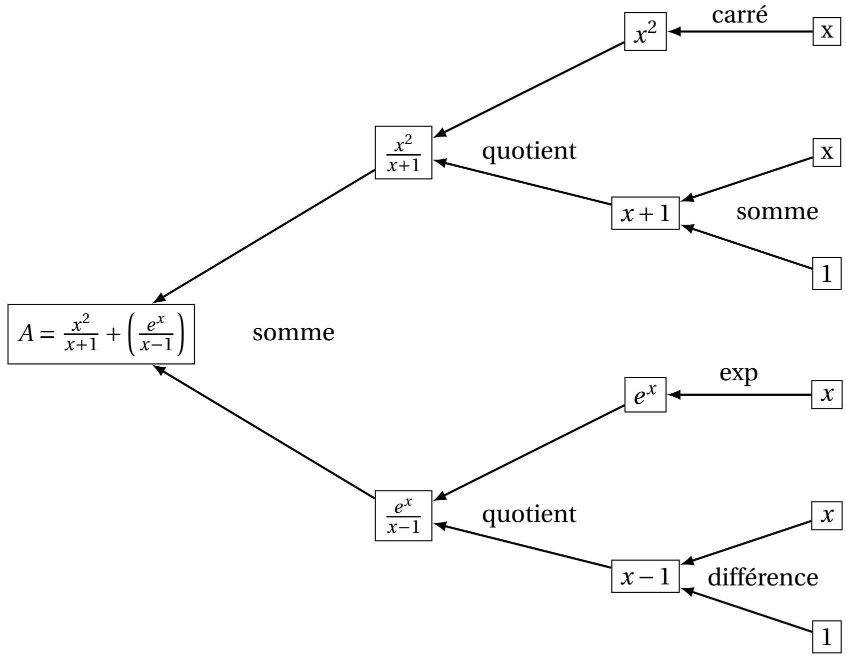
$$a = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6} \text{ ou } a = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Cette ambiguïté est à proscrire, il faut donc aligner le signe = avec l'un des deux traits de fraction, sinon l'écriture n'a aucun sens.

Correction 2

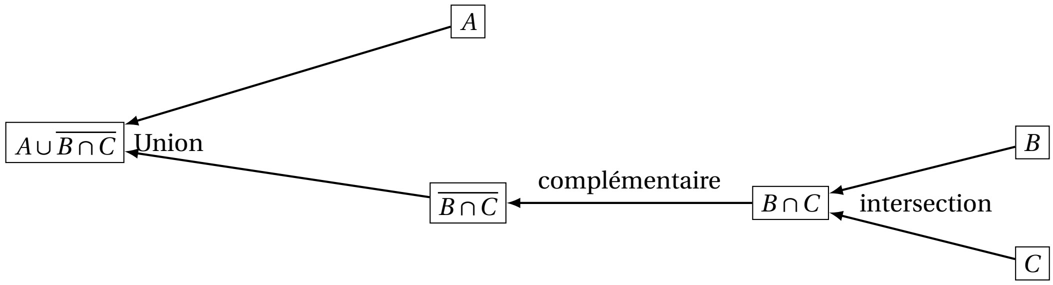
Cet exercice sert juste à faire prendre conscience qu'une expression est un enchainement d'opérations et que l'ordre compte.





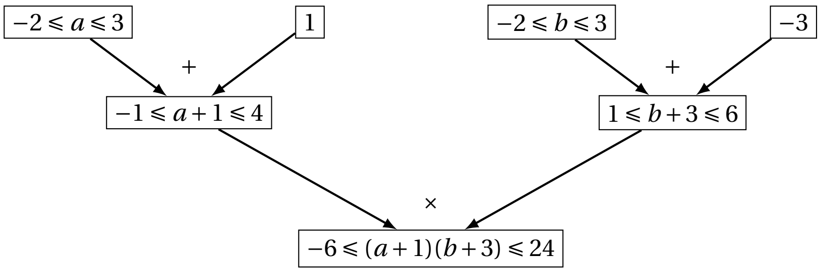
Correction 3

Voici l'arbre :



Correction 4

Pour mieux expliquer comment j'obtiens l'encadrement final, je représente l'arbre avec sa racine en bas plutôt qu'à gauche.



Correction 5

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1\}$, on a : $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.
2. $(n+1)\dfrac{3(n-1)}{2n+2} = \dfrac{3}{2}(n-1)$.
3. $\left(1-(1-p)^2\right)^2 = (1-1+2p-p^2)^2 = (2p-p^2)^2 = 4p^2-4p^3+p^4$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-(x+1)(2x-1) = -(2x^2-x+2x-1) = -2x^2-x+1$.

Correction 6

On utilise les exposants pour simplifier l'écriture.

$$\frac{(-3)\times 128\times 81\times(-1/2)}{27\times 32} = \frac{(-1)\times 3\times 2^7\times 3^4\times(-1)\times 2^{-1}}{3^3\times 2^5} = +2\times 3^2 = 18.$$

Il ne faut surtout pas effectuer les multiplications! Sinon, on obtient $\dfrac{15\,552}{864}$ qui est moche à simplifier en 18.

Correction 7 1. Simplifier au maximum les expressions données en précisant les propriétés utilisées.

a. $A = e^{-3x}e^{3x} = e^0 = 1$
b. $B = (e^3)^2 = e^6$
c. $C = e^{-2x}(e^{2x})^2 = e^{-2x}e^{4x} = e^{2x}$
d. $D = (e^x)^3 \times (e^{-x})^2 = e^{3x}e^{-2x} = e^x$
e. $E = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x$
f. $F = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{1-x}} = e^{(2x+1)-(1-x)} = e^{3x}$

2. Développer et simplifier les expressions suivantes :

a. $A = x(3x-1) = 3x^2-x$
b. $B = (x-1)(3x+1) = 3x^2-2x-1$
c. $C = (x-1)^2 = x^2-2x+1$
d. $D = (2x-1)^2 = 4x^2-4x+1$
e. $E = (2x-1)^2-(x^2+1) = 4x^2-4x+1-x^2-1 = 3x^2-4x$
f. $F = e^x(e^x-1) = e^{2x}-e^x$
g. $G = (e^x-1)^2 = e^{2x}-2e^x+1$
h. $H = (e^x-1)^2-(e^{2x}+1) = -2e^x$
i. $I = (e^x-1)^2-(e^x+1)^2 = -4e^x$.

3. Factoriser les expressions suivantes. Soit on cherche un facteur commun soit on utilise une identité remarquable (comme $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$).

a. $A = x^2-x = x(x-1)$
b. $B = (x-1)^2-4 = ((x-1)-2)((x-1)+2) = (x-3)(x+1)$
c. $C = (2x-1)^2-x^2 = ((2x-1)-x)((2x-1)+x) = (x-1)(3x-1)$
d. $D = (e^x-1)^2-4 = (e^x-1-2)(e^x-1+2) = (e^x-3)(e^x+1)$
e. $E = (e^x-1)^2-(e^x-1) = (e^x-1)\,(e^x-1-1) = (e^x-1)(e^x-2)$

4. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $2^\alpha \times 3^\beta$ en précisant les propriétés des exposants utilisées :
   a. $A = 2\times 12^3 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 2\times 2^6 3^3 \times \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^2 = 2^7 3^3 \times \left(\frac{2^6}{3^4}\right) = 2^{13}\times 3^{-1}$
   b. $B = \frac{4\times 3^2}{6^3} = 2^2\times 3^2 \times 2^{-3}\times 3^{-3} = 2^{-1}\times 3^{-1}$ (j'utilise $6 = 2\times 3$)
   c. $C = 6^2 \times (2\times 3^3)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 2^2\times 3^2\times 2^4 \times 3^{12}\times 3^{-1}\times 2 = 2^7\times 3^{13}$.

5. Soit x un réel strictement positif. Écrire sous la forme la plus simple :
   a. $A = x^3 \times ((2x)^2)^3 = x^3\times 2^6 x^6 = 2^6\times x^9$.
   b. $B = \frac{x^2}{3x^{-1}} = x^2\times 3^{-1}\times x^1 = 3^{-1}x^3$.
   c. $C = \dfrac{4x^{-1}\times x^2}{(2\times x)^3} = 2^2\times x\times 2^{-3}x^{-3} = 2^{-1}\times x^{-2}$.

Correction 8

1. Soit $P(x) = (2x-1)(3x-5)$. Cette forme est factorisée (écriture n° 1).
   (a) On développe. On trouve $P(x) = 6x^2 - 13x + 5$.
   (b) Voici comment on trouve l'écriture canonique. On veut trouver α, β, γ réels tels que $P(x) = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma = \alpha x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 + \gamma$.
   Il faut connaître ses identités remarquables. Comme le terme dominant est $6x^2$, il faut que $\alpha = 6$. Le double produit donne $-2\alpha\beta x$ qui doit être égal à -13, donc $\beta = \frac{-13}{-12} = \frac{13}{12}$. Enfin, $5 = \beta^2 + \gamma$, donc $\gamma = 5 - \dfrac{169}{144}$. On trouve
   $$P(x) = 6\left(x - \frac{13}{12}\right)^2 + 5 - \frac{169}{144}.$$
   Pour contrôler votre résultat, développez $6\left(x-\frac{13}{12}\right)^2 + 5 - \frac{169}{144}$. Tout se simplifie très bien.
2. Parmi ces trois écritures, choisir la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Prouver le ou les extrema de P, on utilise la forme canonique (écriture 3). Comme un carré est toujours positif, pour tout x on aura
   $$P(x) = 6\left(x - \frac{13}{12}\right)^2 + 5 - \frac{169}{144} \geqslant 5 - \frac{169}{144} = \frac{551}{144}.$$
   Ainsi, P a un minimum atteint lorsque $\left(x-\frac{13}{12}\right)^2 = 0$, c'est à dire pour $x = \frac{13}{12}$. Ce minimum vaut $\frac{551}{144}$.
   (b) Prouver l'image de 0, on préfère l'écriture développée. Lorsqu'on remplace x par 0, il ne reste que le terme constant et $P(0) = 5$.
   (c) Pour trouver les antécédents de 0, on résout l'équation $P(x) = 0$. Si vous calculez Δ, c'est que vous n'avez pas compris ce document! On utilise l'écriture factorisée. $P(x) = (2x-1)(3x-5)$. Donc d'après le théorème du produit nul soit $2x-1=0$ soit $3x-5=0$. Il suit que les deux racines sont $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{5}{3}$.
   (d) Si on utilise la forme développée, comme $\lim_{x\to+\infty} 6x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -13 = -\infty$, on a une forme indéterminée! Si on utilise l'écriture factorisée, $\lim_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(3x-5) = +\infty$, donc la limite du produit est $+\infty$.

Correction 9 1. **a.** $S = \{15\}$ **b.** $S = \{0; \frac{4}{3}\}$ **c.** $S = \{1\}$

d. On a un produit, mais il n'est pas nul! Les solutions ne sont pas $S \neq \left\{\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.
$$(3x+2)(3x-2) = 1 \Longleftrightarrow 9x^2 - 4 = 1 \Longleftrightarrow 9x^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow (3x-\sqrt{5})(3x+\sqrt{5}) = 0.$$
Ainsi, $S = \left\{\frac{-\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$.

e. On applique le théorème du produit nul :
$$\frac{e^x - 1}{x} = 0 \Longleftrightarrow e^x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } x \neq 0 \Longleftrightarrow S = \emptyset.$$

f. On factorise comme le second membre est nul :
$$(1-x)(x-x^2) + x(x-x^2) = 0 \Longleftrightarrow x(1-x)^2 + x^2(1-x) = 0 \Longleftrightarrow x(1-x)(1-x+x) = 0 \Longleftrightarrow x(1-x) = 0.$$
Le théorème du produit nul implique $S = \{0;1\}$.

2. Résoudre les équations suivantes :
   a. $S = \{-\ln 3\}$ **b.** $S = \{\ln 2\}$ **c.** $S = \{e^{-2}; e^2\}$

3. Résoudre les inéquations suivantes :

   a. $S =]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}[$ **b.** $]0;e^{-3}] \cup [e^3;+\infty[$

   Pour c : Comme on l'a fait dans 1f), on factorise : $(1-x)(x-x^2)+x(x-x^2) = x(1-x)$. On fait un rapide tableau des signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi, $S =]0;1[$.

Correction 10

1. Méthode : on se ramène à l'étude d'un signe, on factorise et on dresse un tableau des signes.

$$(x+2)^2 < (-3x+1)^2$$
$$(x+2)^2 - (-3x+1)^2 < 0$$
$$(x+2-(-3x+1))\,(x+2-3x+1) < 0 \qquad \text{parenthèses!}$$
$$(4x+1)(-2x+3) < 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4x+1)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi, $S =]-\infty;-\frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{2};+\infty[$.

2. On utilise la même méthode, sauf qu'on étudiera le signe d'un quotient, il faut donc mettre au même dénominateur.

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} \geqslant 0$$
$$\frac{x(x+2)-(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$$
$$\frac{x^2+2x-(x^2+2x-1)}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0 \qquad \text{parenthèses!}$$
$$\frac{-1}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(x+2)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

   Ainsi, comme -2 et -1 sont des valeurs interdites, on les exclue des solutions : $S =]-2;-1[$.

3. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

$$x^3 \geqslant \frac{16}{x} \Leftrightarrow \frac{x^4-16}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x} \geqslant 0.$$

Comme $x^2+4>0$, le signe de ce quotient est le même que le signe de $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x}$. On remplit le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S=[-2;0[\cup[2;+\infty[$.

Correction 11

1. Ensemble de définition : La fonction f est la composée du quotient de polynômes $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ et de la fonction ln. Pour avoir des images, il faut que $\dfrac{x+1}{x-1}>0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Ainsi, $\mathscr{D}_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. On remarque que cet ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$. On peut donc se poser la question de la parité de f.

E Si on écrit $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$, cette nouvelle fonction g n'est valide que si $x+1>0$ et si $x-1>0$ donc $\mathscr{D}_g=]1;+\infty[$. Ainsi, on ne peut pas dire que $f=g$!

2. Parité : Soit $x \in \mathscr{D}_f$, comme $-x \in \mathscr{D}_F$ aussi, on a :

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-f(x).$$

J'ai utilisé le fait que $\ln(1/a)=-\ln(a)$. Ainsi, f est impaire.

3. Continuité et dérivabilité sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$: On écrit la phrase habituelle : La fonction f est la composée de la fonction rationnelle $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ (quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas) qui est une fonction continue(resp dérivable) sur ces intervalles et de la fonction ln qui est continue(resp dérivable) sur $]0;+\infty[$. Ainsi, f est continue (resp. dérivable) sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$.

On a $u'(x)=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$. On utilise $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ et donc

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}\times\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{-2}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de l'opposé de $(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$				$-$	
f		$\searrow$				$\searrow$	

↯J'insiste, f n'est pas définie sur $[-1;1]$.
Je ne parle pas des limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$ comme on ne les a pas encore retravaillées.

4. Convexité : On peut calculer f'' après avoir justifié par une phrase que f' est dérivable comme inverse du polynôme $u : x \mapsto (x-1)(x+1)$ qui ne s'annule pas sur l'ensemble de définition multiplié par la constante -2. On utilise la formule de dérivation $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$. Comme $u'(x) = 2x$, il suit :

$$f''(x) = (-2) \times -\frac{2x}{((x-1)(x+1))^2} = \frac{4x}{((x-1)(x+1))^2}$$

qi est du signe de x. Ainsi, on a :

x	$-\infty$		-1		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$				$+$	
f		concave				convexe	

Correction 12 1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = xe^{-x}$. Elle est dérivable comme produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ dérivables sur $\mathbb{R}$. Il suit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Une exponentielle est positive, donc f_1' est du signe de $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $1-x$		$+$	0	$-$	
variations de f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. La fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\,e^{-x}$. Elle est le produit de x^{n-1}, de $(n-x)$ et de e^{-x}.

Si n est impair, alors x^{n-1} est toujours positif et f_n' est du signe de $n-x$.

x	$-\infty$		n		$+\infty$
signe de x^{n-1}		$+$		$+$	
signe de $n-x$		$+$	0	$-$	
signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0

Si n est pair, alors x^{n-1} change de signe :

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
signe de x^{n-1}		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $n-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0

Les limites présentes dans le tableau de variations ne sont pas demandées.

3. On résout l'équation $f_2(x) = f_1(x)$ (j'utilise le fait que $e^x > 0$) :

$$x^2e^{-x} = xe^{-x} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Les points d'intersection ont pour abscisse 0 et 1, ce sont $A(0,0)$ et $B(1,e^{-1})$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et de $\mathscr{C}_{n+1}$ revient à résoudre l'inéquation $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$:

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) \Leftrightarrow x^{n+1} \geqslant x^n \Leftrightarrow x^n(x-1) \geqslant 0.$$

On fait le tableau des signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de x^n		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Les deux courbes s'intersectent au point d'abscisse 0 et 1. La courbe $\mathscr{C}_{n+1}$ est en dessous de $\mathscr{C}_n$ sur $]-\infty;1]$ et au dessus sur $[1;+\infty[$.

Correction 13 1. D'une part $f(2x) = \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$. D'autre part

$$\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2\times\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1+\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{Or, } 1+\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2 &= \frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)^2}+\frac{\left(e^{2x}-1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)^2}\\ &= \frac{\left(e^{2x}+1\right)^2+\left(e^{2x}-1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)^2}\\ &= \frac{\left(e^{2x}\right)^2+2e^{2x}+1+\left(e^{2x}\right)^2-2e^{2x}+1}{\left(e^{2x}+1\right)^2}\\ &= \frac{2\left(e^{4x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} &= \frac{2\times\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{\frac{2(e^{4x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}}\\ &= \cancel{2}\frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^{2x}+1}}\times\frac{\left(e^{2x}+1\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\left(e^{4x}+1\right)}\\ &= \frac{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^{4x}+1}\\ &= \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que, pour tout réel x, $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$.

2. Pour tout x,

$$\begin{aligned}
f(x)+f(-x) &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} \\
&= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{\left(e^{-2x}-1\right)\times e^{2x}}{\left(e^{-2x}+1\right)\times e^{2x}} \quad = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \\
&= \frac{e^{2x}-1+1-e^{2x}}{e^{2x}+1} \\
&= \frac{0}{e^{2x}+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc pour tout réel x, on a $f(x)+f(-x)=0$.

Correction 14 Avez-vous reconnu que cette fonction t est la même que la fonction f de l'exercice 13 ?

1. Pour tout réel x, soit x soit $-x$ est positif, et donc $e^x+e^{-x} \geqslant 1$. Ainsi, le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction t étant le quotient de $u : x \mapsto e^x - e^{-x}$ et de $v : x \mapsto e^x + e^{-x}$, fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Sa dérivée est donnée pour x réel par

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} \quad \text{en utilisant} a^2-b^2=(a-b)(a+b) : \\
&= \frac{(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})(e^{2x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.
\end{aligned}$$

   La dérivée de t est toujours strictement positive donc t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, on obtient le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
t	$\nearrow$	

2. Soient x et y des nombres réels.

$$\begin{aligned}
\frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)} &= \frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} + \dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}} \\
&= \frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})} \\
&= \frac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{-x+y}}-e^{-x-y}+e^{x+y}+\cancel{e^{y-x}}-\cancel{e^{x-y}}-e^{-x-y}}{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{-x+y}}+e^{-x-y}+e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{-x+y}}+e^{-x-y}} \\
&= \frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{2e^{x+y}+2e^{-x-y}} = t(x+y).
\end{aligned}$$

Correction 15

1. La fonction f est le produit de $\frac{1}{2}$ et de $x \mapsto x+\frac{1}{x}$. Cette dernière fonction est définie si le dénominateur ne s'annule pas, donc si $x \neq 0$. Ainsi, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2. Résolvons l'équation $f(x)=x$:

$$f(x)=x \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-x=0 \Longleftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{1}{2x}-x=0 \Longleftrightarrow -\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=0,$$

   mais comme $x \neq 0$, on peut multiplier par $2x$:

$$f(x)=x \Longleftrightarrow -x^2+1=0 \Longleftrightarrow (1-x)(1+x)=0 \Longleftrightarrow S=\{-1;1\}.$$

3. Étudier le signe de $f(x)-x$.

$$f(x)-x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-x=\frac{1}{2}\left(-x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{x}\right).$$

On peut dresser un tableau de signe. La quantité $f(x)-x$ est du signe de $1-x^2=(1-x)(1+x)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

4. Après calcul, $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\dfrac{x^2-1}{2x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{2x^2}$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe de x^2-1.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 16

Méthode : Étudier le signe de la différence $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. On pense tableau des signes.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x)-f_n(x) &= \left(\frac{x}{n+1}-\frac{n+1}{x}\right)^2-\left(\frac{n}{x}-\frac{x}{n}\right)^2 \quad \text{on pense idrem pour factoriser :}\\
&= \left(\frac{x}{n+1}-\frac{n+1}{x}-\frac{x}{n}+\frac{n}{x}\right)\left(\frac{x}{n+1}-\frac{n+1}{x}+\frac{x}{n}-\frac{n}{x}\right) \quad \text{on met au même dénominateur :}\\
&= \left(\frac{nx^2-n(n+1)^2-(n+1)x^2+n^2(n+1)}{n(n+1)x}\right)\left(\frac{nx^2-n(n+1)^2+(n+1)x^2-n^2(n+1)}{n(n+1)x}\right) \quad \text{on simplifie en haut :}\\
&= \frac{\left(-x^2+n(n+1)\left[-(n+1)+n\right]\right)\left((2n+1)x^2-n(n+1)\left[(n+1)+n\right]\right)}{n^2(n+1)^2x^2}\\
&= \frac{\left(-x^2-n(n+1)\right)\left((2n+1)x^2-n(n+1)(2n+1)\right)}{n^2(n+1)^2x^2}\\
&= \frac{-\left(x^2+n(n+1)\right)(2n+1)\left(x^2-n(n+1)\right)}{n^2(n+1)^2x^2}.
\end{aligned}$$

On étudie les facteurs en présence :

— quelque soit $x\in\mathbb{R}^*$, $-(x^2+n(n+1))<0$;

— $2n+1>0$;

— quelque soit $x\in\mathbb{R}^*$, $n^2(n+1)^2x^2>0$.

Ainsi, $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est du signe opposé de $x^2 - n(n+1)$.

$$x^2 - n(n+1) = (x - \sqrt{n(n+1)})(x + \sqrt{n(n+1)}).$$

Maintenant qu'on a simplifié au maximum, on peut faire le tableau des signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{n(n+1)}$		0		$+\sqrt{n(n+1)}$		$+\infty$
$x - \sqrt{n(n+1)}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{n(n+1)}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x - \sqrt{n(n+1)})(x + \sqrt{n(n+1)})$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On conclut en disant que $\mathscr{C}_{n+1}$ est au dessus de $\mathscr{C}_n$ sur $[-\sqrt{n(n+1)};0[$ et sur $]0;+\sqrt{n(n+1)}]$, les courbes ayant un point d'intersection aux points d'abscisse $A_n = \left(-\sqrt{n(n+1)}; f_n(-\sqrt{n(n+1)})\right)$ et $B_n\left(\sqrt{n(n+1)}; f_n(\sqrt{n(n+1)})\right)$.

$$\begin{aligned}
f_n(-\sqrt{n(n+1)}) &= \left(\frac{-\sqrt{n(n+1)}}{n} + \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n^2}} + \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2 \text{ avec la formule } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} : \\
&= \left(-\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^2 \text{ on utilise une id.rem :} \\
&= \frac{n}{n+1} - 2\sqrt{\frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n}} + \frac{n+1}{n} \text{ on simplifie :} \\
&= \frac{n}{n+1} - 2 + \frac{n+1}{n} \text{ on met au même dénominateur :} \\
&= \frac{n^2 - 2n(n+1) + (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{(n-(n+1))^2}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, A_n a pour coordonnées $\left(-\sqrt{n(n+1)}, \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Pour les calculs des coordonnées de B_n, on réfléchit avant de refaire le calcul :

$$f_n(\sqrt{n(n+1)}) = \left(\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} - \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2.$$

On remarque que l'expression définissant $f_n(x)$ est un carré. La fonction f_n est paire, donc $f_n(\sqrt{n(n+1)}) = f_n(-\sqrt{n(n+1)})$.
Ainsi, B_n a pour coordonnées $\left(\sqrt{n(n+1)}, \frac{1}{n(n+1)}\right)$.